Equations différentielles 3

Exercice [Uniformisation des triangles circulaires] On appelle triangle circulaire, un triangle de $\hat{\mathbf{C}}$ dont les cotés sont des arcs de cercles ou des segments. Nous les appellerons triangles.

1. Montrer l'image par une homographie d'un triangle est un triangle semblable (*i.e.* ayant les mêmes angles)
2. Montrer qu'un triangle est toujours semblable à un triangle ayant deux cotés droits.

Considérons l'équation hypergéométrique

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + (c-(1+a+b)z)\,\frac{dy}{dx} - aby = 0$$

On pose $\alpha = 1-c, \beta = b-a$ et $\gamma = c-a-b$ et on supposera que $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$

3. Montrer que si F et G sont deux solutions de l'équation hypergéométrique definies en un point de $\mathbb{H}$ alors $f = \frac{G}{F}$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}$.
4. En utilisant le wronskien de F et G, montrer que la dérivée de f ne s'annule pas sur $\mathbb{H}$
5. Vérifier que si (F_0, G_0) est une base de solutions de quotient f_0 et (F_1, G_1) est une base de solutions de quotient f_1 au voisinage d'un même point alors il existe une homographie h telle que $h \circ f_1 = f_0$.
6. Si $F_0(z) = F(a, b, c; z)$ est la série hypergéométrique de Gauss, montrer que $G_0(z) = z^{1-c}F(a-c, b-c+1, 2-c; z)$ est une seconde solution.
7. Montrer que ces deux solutions sont réelles sur $]0,1[$, définies et indépendantes sur $\mathbb{H}$.
8. Montrez que la fonction $f_0 = \frac{G_0}{F_0}$ envoie le demi-disque $D(0,1)\cap\overline{\mathbb{H}}$ dans le secteur $\arg(z) \in [0, \alpha\pi]$
9. Montrez de la même manière que le quotient des solutions $F_1(z) =$ et $G_1(z) =$ envoie le demi-disque $D(1,1) \cap \overline{\mathbb{H}}$ dans le secteur $\arg(z) \in [0, \beta\pi]$
10. En déduire que l'image de $\mathbb{H}$ par f_0 est un triangle d'angles $\alpha\pi$, $\beta\pi$ et $\gamma\pi$. .

difficile L'application f_0 est un biholomorphisme de $\mathbb{H}$ sur ce triangle.

+ difficile Etudier le cas d'un angle nul et donner une équation différentielle satisfaite par l'uniformation d'un triangle ayant trois angles nuls.

Exercice Un nombre complexe $z \in \mathbb{H}$ étant fixé, on appelle périodes de la cubique $y^2 = x(x-1)(x-z)$ les valeurs des intégrales

$$F(z) = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}} \text{ et } G(z) = 2\int_1^z \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}}$$

1. Donner une formule intégrale pour $F'(z)$ et $F''(z)$.

Une intégration par parties va nous permettre d'exprimer F'' en fonction de F et F'. Considérons

$$f(x,z) = 4(x-z)^{-3/2}\sqrt{x(x-1)}.$$

2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et vérifier que

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}dx = F(z) + 4(2z-1)F'(z) + 4z(z-1)F''(z)$$

3. En déduire de F est solution d'une hypergéométrique.

+ difficile Cette hypergéométrique “uniformise” un type de triangle, lequel ?